Analysis Zusammenfassung

Alina Popov

Mengen und Zahlen

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Quantoren: $\forall, \exists, \exists!, \nexists$
- stehen vor der Aussage
- sind nicht kommutativ

Intervalle

offenes: (a,b) / $]a,b[$
geschlossenes: $[a,b]$
halb offenes: $(a,b]$ oder $[a,b)$

unbeschränkte Intervalle sind immer offen

Kenngrößen

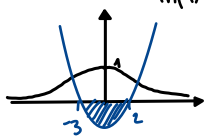
Maximum $\max(X)$
Minimum $\min(X)$
kleinste obere Schranke $\sup(X)$
größte untere Schranke $\inf(X)$

Bsp.: 1) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x=\sin(a)\ \forall a\in\mathbb{R}\}$
$\sup(A)=\max(A)=1$; $\inf(A)=\min(A)=-1$

2) $B=\{x\in\mathbb{R} \mid x=e^{-a^2}\ \forall a\in\mathbb{R}\}$
$\sup(B)=\max(B)=1$; $\inf(B)=0$
$\min(B)$: existiert nicht

3) $M_1=\{3+\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$
$\max(M_1)=\sup(M_1)=4$; $\inf(M_1)=3$
$\min(M_1)$: existiert nicht

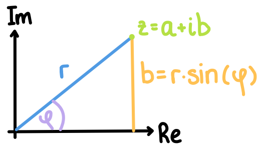
4) $M_2=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+x-6<0\}$
$x_{1/2}=-3/2$ $\quad I=(-3,2)$
$\inf(M_2)=-3$, $\sup(M_2)=2$



Komplexe Zahlen

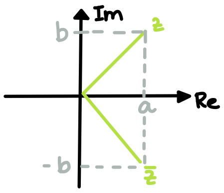
Normalform: $z=a+ib$ $\quad a,b\in\mathbb{R}$
→ a-Realteil, b-Imaginärteil
→ $\boxed{i^2=-1}$

Polarform: $z=r\cdot e^{i\varphi}$
$e^{i\varphi}=\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)$
$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ → Betrag
φ → Argument

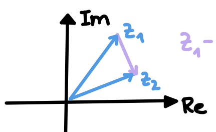


$\forall z\in\mathbb{R}: |z|^2=z^2$ ✓
$\forall z\in\mathbb{C}: |z|^2=z^2$ ✗ , da $i^2=-1$

• Komplexe Konjugation ($z \xrightarrow{i \to -i} \bar{z}$) kann als Spiegelung an der reellen Achse in der Gauß'schen Zahlenebene interpretiert werden:



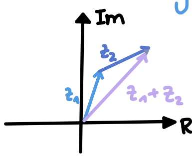
$|z|$ → Pythagoras
$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}$
$z=a+ib$
$z\bar{z}=(a+ib)(a-ib)$
$=a^2-iab+iab-i^2b^2=a^2+b^2$



$|z_1-z_2|=|z_2-z_1|$

↳ Abstand zw. 2 komplexen Zahlen

Dreiecksungleichung:



$|z_1|+|z_2| \geq |z_1+z_2|$

Rechnen mit komplexen Zahlen

Polarform

Multiplikation: $z_1\cdot z_2=r_1e^{i\varphi_1}\cdot r_2e^{i\varphi_2}=r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Division: $\frac{z_1}{z_2}=r_1e^{i\varphi_1}\cdot\frac{1}{r_2}e^{-i\varphi_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

Potenzieren: $z^k=(re^{i\varphi})^k=r^ke^{ik\varphi}$

Wurzelziehen: $\sqrt[k]{z}=z_n^{1/k}=r^{1/n}e^{i(\varphi/n+2\pi k/n)}$, wobei $k=0,1,\dots,n-1$

wird in gleiche abschnitte Unterteilt

Bsp.: $z=3+2i$, $w=-2-5i$

$\frac{z}{w}=\frac{3+2i}{-2-5i}\cdot\underbrace{\frac{-2+5i}{-2+5i}}_{\text{komplex konjugiert}}=\frac{-6+15i-4i+10i^2}{4-\cancel{10i}+\cancel{10i}-25i^2}=\frac{-16+11i}{29}=-\frac{16}{29}+\frac{11}{29}i$

Normalform

$z+w=a+ib+c+id=(a+c)+i(b+d)$

$\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\bar{w}}{w\cdot\bar{w}}=\frac{z\bar{w}}{|w|^2}$

Geometrische Veranschaulichung:
Multiplikation mit $re^{i\varphi}$ ist einerseits eine Streckung $(r>1)$ / Stauchung $(0<r<1)$
und andererseits eine Drehung um den Winkel φ ($\varphi>0$ ↺ ; $\varphi<0$ ↻)

Umrechnungen:

Polar → Normal/Kartesisch

$z = re^{i\varphi}$

$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$= \underbrace{r\cos\varphi}_{a} + i\underbrace{r\sin\varphi}_{b}$

Bsp. $z = 3e^{\frac{3}{4}\pi i}$

$z = 3\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = \boxed{3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

Normal → Polarform

$z = a + ib$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

1. & 4. Quadrant $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ falls $x > 0$

2. Quadrant $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$ falls $x < 0 \wedge y \geq 0$

3. Quadrant $\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$ falls $x < 0 \wedge y < 0$

Bsp.: $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad |z| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{1/2 + 1/2} = 1 = r$

2. Qudr.: $-\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = -1 = \tan\varphi \rightarrow \arctan(-1) + \pi = \frac{3}{4}\pi$

$\boxed{\Rightarrow z = e^{3/4\,\pi i}}$

Normalform

$\sqrt{a+ib} = z \leftrightarrow z^2 = a + ib$

$z = x + iy \leftrightarrow z^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{=a} + \underbrace{2ixy}_{+ib}$

$\Rightarrow x^2 - y^2 = a \quad 2xy = b$

Polarform

$\sqrt[k]{z} = z_n^{1/k} = r^{1/k} e^{i\varphi/k + i\,2\pi n/k}$, wobei $n = 0, 1, \ldots, k-1$

$z_0 = r^{1/k} e^{i\varphi/\pi}$

$z_1 = r^{1/k} e^{i\varphi/k + i\,2\pi/k}$

$z_2 = r^{1/k} e^{i\varphi/k + 4\pi/k}$

$\vdots$

Bsp.: $\sqrt[3]{1+i} \quad r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \tan\varphi = \frac{1}{1} \rightarrow \arctan(1) = \frac{1}{4}\pi \rightarrow z = \sqrt{2}e^{1/4\,\pi i}$

$\sqrt[3]{\sqrt{2}e^{1/4\,\pi i}} = \sqrt{2}^{1/3} e^{1/4\,\pi i \cdot 1/3} = 2^{1/6} e^{1/12\,\pi i} = \boxed{\sqrt[6]{2}\,e^{1/12\,\pi i} = z_0}$

$\sqrt[6]{2}\,e^{1/12\,\pi i + 2/3\,\pi} = z_1$

$\sqrt[6]{2}\,e^{1/12\,\pi i + 4/3\,\pi} = z_2 = \sqrt[6]{2}\,e^{17/12\,\pi i}$

↯ wir können nicht mehr als 2π haben

$\Rightarrow \sqrt[6]{2}\,e^{-i\,7/12\,\pi} \quad \left(\frac{17}{12}\pi - 2\pi = -\frac{7}{12}\right)$

Wichtige Eigenschaften:

1) Symmetrie:

$\sin(x) = -\sin(x)$ "ungerade"

$\cos(x) = \cos(-x)$ "gerade"

2) Periodizität:

$\sin(x) = \sin(x + 2\pi) = -\sin(x + 2\pi)$

→ analog für cos, tan

3) Phasenverschiebung

$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$

Polynomdivision

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, kann in n Linearfaktoren zerlegt werden, sodass $p(x) = a_n(x-z_1)(x-z_2)...(x-z_n)$ (wobei z_n die NS von $p(x)$ sind)

Die nicht-reelen NS eines Polynoms mit reelen Koeffizienten treten in komplex konjugierten Paaren auf

Bsp.: $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$ $\quad x_1 = 2$ ↙NS raten

$(x^3-4x^2+9x-10):(x-2) = x^2-2x+5$
$-(x^3-2x^2)$
$-2x^2+9x$
$-(-2x^2+4x)$
$5x-10$
$-(5x-10)$
0

$p(x) = (x-2)(x-1-2i)(x-1+2i)$

$x_2 - 2x + 5 = 0$

$x_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\cdot 5}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}$

$x_2 = \frac{2+4i}{2} = 1+2i \quad x_3 = \frac{2-4i}{2} = 1-2i$

Folgen und Reihen

Folgen – (unendliche) Liste von Zahlen

geometrische Folge $(\cdot x)$: $\underbrace{a_n = a_{n-1}q}_{\text{rekursive Beschreibung}}$ $\boxed{= a_0 \cdot q^n \\ = a_1 q^{n-1}}$ explizite Beschreibung

arithmetische Folge $(+x)$: $a_n = a_{n-1} + d$ $\boxed{= a_0 + d \\ = a_1 + (n-1)d}$

Eine Folge $(a_n)_n$ konvergiert genau dann, wenn ein $L \in \mathbb{R}$ existiert für das gilt: $\lim_{n\to\infty}(a_n)_n = L$
↳ ⚠ $\pm\infty \notin \mathbb{R}$

Hinweis: Folgen divergieren gegen $\pm\infty$

Wichtige Folgen: $a_n = x^n$ → konvergiert für $|x|<1$ gegen 0; divergiert $|x|>1$
$x=1$ → konstante Folge; $x=-1$ → oszilliert

$a_n = n^{-p}$ → konvergiert für $p>0$ gegen 0; divergiert für $p<0$

Jede beschränkte (obere/untere Schranke) und monotone $(a_n \geq a_{n+1} / a_n \leq a_{n+1})$ Folge konvergiert

Sandwich-Theorem

Zwei Folgen a_n, b_n mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$
↳ Wenn ein c_n existiert, für das $a_n \leq c_n \leq b_n$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = L$

Reihen – „Summen mit unendlich vielen Summanden/Summe einer Folge" $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)$

Falls die Partialsumme gegen $L<\infty$ konvergiert, konvergiert die Reihe

- Nullfolge als notwendiges Kriterium
  - $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ → Konvergenz möglich
  - $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ → Reihe divergiert

Wichtige Reihen

Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ → konvergiert für $s>1$, divergiert für $s\leq 1$

Geometrische Reihe: Wenn $q \neq 0$ & $q \neq 1$ → $s_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^n}{1-q^n}$

Wenn $|q|<1$ → $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$

Teleskop-Reihe

Sei $b_n \to 0$ eine konvergente Folge und $a_n = b_n - b_{n+1}$
dann gilt $\sum_{n=1}^{N} a_n = b_1 - b_{N+1}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = b_1$

Potenzreihe: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3$ (Entwicklungspunkt: a; Koeffizienten: c_k)

Jede Potenzreihe besitzt einen Konvergenzradius: $\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|}$

$(a-R; a+R)$ – Konvergenzintervall
↳ an den Grenzen unbestimmt → „Grauzone" $\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}}$

Konvergenzkriterien

▪ Quotientenkriterium

· $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\overset{\text{genau dann, wenn}}{\Leftrightarrow}$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1}$, $q \in \mathbb{R}$

bei $=1$ keine Aussage möglich

▪ Wurzelkriterium

· $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq p < 1}$, $p \in \mathbb{R}$

bei $=1$ keine Aussage möglich

▪ Majorantenkriterium

· Wenn $(b_n)_n$ existiert, sodass $|a_n| \leq |b_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

und $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n = L}$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert

▪ Minorantenkriterium

· Wenn $(b_n)_n$ existiert, sodass $|a_n| \geq |b_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$

und $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergiert}}$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert

---

Grenzwerte

Rechenregeln mit lim

· $\lim_{n\to\infty} a_n = A$; $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

▪ $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$

▪ $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

▪ $\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = A/B$, $b_n, B \neq 0$

▪ $\lim_{n\to\infty} c\, a_n = cA$

Berechnung

$c < \ln(n) < n^a < a^n < n! < n^n$

· $\lim_{n\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \rightarrow$ höchste Potenz ausklammern

↳ Bsp: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+7n^3}{9n^4-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^4}(2+7/n)}{\cancel{n^4}(9-2/n^4)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$ ($7/n \to 0$, $2/n^4 \to 0$)

· $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{p(n)}+q(n)}{r(n)} \longrightarrow$ Wurzeltrick: $\frac{\sqrt{p(n)}-q(n)}{\sqrt{p(n)}-q(n)}$

↳ Bsp: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}-x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-4}-x}{2x} \cdot \frac{\sqrt{x^2-4}+x}{\sqrt{x^2-4}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}}{2x(\sqrt{x^2-4}+x)} = 0$

Good to know

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{x!} = 0$, $x \in \mathbb{R}$

3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

4) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$, $x \in \mathbb{R}^+$

5) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\ln(\text{Pol.}1)}{\ln(\text{Pol.}2)}\right|$ verhält sich wie $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Pol.}1}{\text{Pol.}2}$

Einseitige Grenzwerte:

$\lim_{x\nearrow c} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$ → rechtsseitiger Grenzwert

$\lim_{x\searrow c} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$ → linksseitiger Grenzwert

! Ein Grenzwert $\lim_{x\to c} f(x)$ existiert dann, wenn $\lim_{x\nearrow c} f(x) = \lim_{x\searrow c} f(x)$!

Potenzreihen

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

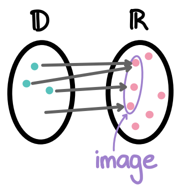
Funktionen

Definitionsbereich (Domain) — Zielbereich (Range)

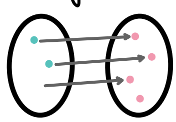
$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto y = f(x)$

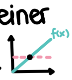
unabhängige Variable/Element — abhängige Variable



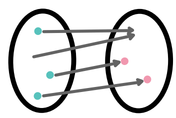
injektiv



Nur 1 Schnittpunkt mit einer beliebigen Horizontalen

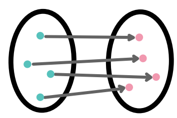


surjektiv



(range = image)

bijektiv



(Umkehrfkt. möglich)

Konvex – linksgekrümmt, $f''(x) \geq 0$

Konkav – rechtsgekrümmt, $f''(x) \leq 0$

→ jede Linearkombination zweier konvexer/konkaver Funktionen ist wieder konvex/konkav

Monotonie: $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ - wachsend ; $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ - fallend

strenge Monotonie = Injektivität → $f(x_1) < f(x_2)$ - wachsend ; $f(x_1) > f(x_2)$ - fallend

Punktsymmetrie: $f(x) = -f(-x)$ → $\sin(x)$ und x^{ungerade}

Achsensymmetrie: $f(x) = -f(x)$ → $\cos(x)$ und x^{gerade}

$\sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$

$\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = -i\sin(it)$

$\cosh(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \cos(it)$

Transformationen:

$f(x)=a(x-b)+c$

$a>1$ - Streckung ; $0<a<1$ - Stauchung in y-Richtung ; $-a$ - Spiegelung

b - Verschiebung in x-Richtung → $(x-b)$ - rechts & $(x+b)$ - links

c - Verschiebung in y-Richtung → $c>0$ - oben & $c<0$ - unten

Umkehrfkt. $g(x)=f^{-1}(x)$ → Spiegelung an der Ursprungsgerade $y=x$

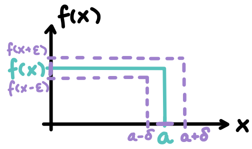
Umkehrfunktion:

- $\forall x \in X \; f^{-1}(f(x)) = f^{-1} \circ f(x) = x$
- $\forall y \in Y \; f(f^{-1}(y)) = f \circ f^{-1}(y) = y$
- ist f stetig und bijektiv

Stetigkeit:

$\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$ → f muss bei a definiert sein

ε-δ-Kriterium: f stetig bei $a \in \mathbb{D} \Leftrightarrow \underbrace{\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0}_{\text{für jedes } \varepsilon \text{, gibt es 1 } \delta} \; | \; \forall x \in \mathbb{D} \; |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

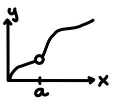


!Verknüpfung von stetigen Fkt. ist stetig!

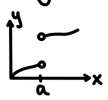
Im kompakten Intervall I (abgeschlossen & beschränkt) nimmt f sein Max./Min. an

hebbare Definitionslücke

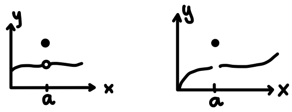
$\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x)$



Sprungstelle



keine Definitionslücke



Zwischenwertsatz: Sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Fkt. und $c \in [a,b]$ beliebig, dann gibt es $\exists x \in [a,b]$ mit $f(x)=c$

Bsp.: $g(x)=\sqrt{3x-4}+2\sin(x)-x-\frac{1}{2}=0 \to g(x)=\sqrt{3x-4}+2\sin(x)-x=\frac{1}{2}$

$\mathbb{D}=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{4}{3}\}$; g(x) ist auf $\mathbb{D}$ stetig

Es gilt u.a.: $g(\frac{4}{3})=0{,}61 > \frac{1}{2}$ & $g(4)=-2{,}69 < \frac{1}{2}$ → d.h. es gibt ein x^* mit $g(x^*)=\frac{1}{2}$ auf dem Intervall $[\frac{4}{3};4]$

Ableitung

Damit f' existiert, muss f auf (a,b) differenzierbar und auf [a,b] stetig sein

Aus dem Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ wird der Differentialquotient $\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$ $h=\Delta x$

Ableitungsregeln

1) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$
2) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v+uv'}{v^2}$
3) $a(i(x)) = a'(i(x)) \cdot i'(x)$
4) $f^{-1\prime} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
5) $f'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Wichtige Ableitungen

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = \ln(a) \cdot a^x$

$\ln(x)' = \frac{1}{x}$

$\sin(x)' = \cos(x)$

$\cos(x)' = -\sin(x)$

$\sin^2(x)' = 2\sin(x)\cos(x)$

$\cos^2(x)' = -2\cos(x)\sin(x)$

$\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$

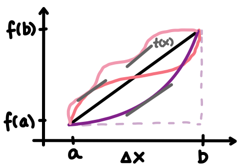
$\arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Mittelwertsatz: Sei f auf [a;b] stetig und diffbar auf (a;b), dann existiert $\exists z \in (a;b)$, sodass $f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

- Interpretation



Die Tangenten aller dieser Fkt. haben die gleiche Tangentensteigung wie f'(z)

Bernoulli - L'Hôpital

Nur anwendbar bei $\lim_{x \to \infty} f(x)$ → Problem "$\frac{0}{0}$" & "$\frac{\infty}{\infty}$"

$\boxed{\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$

Funktionen in mehreren Variablen

Niveaulinie - von f zum Niveau c ist die Menge aller Punkte (x,y) im Definitionsbereich, für die gilt: $f(x,y)=c$

Stetigkeit: $f(x,y)$ heißt an der Stelle (x_0,y_0) stetig, wenn:

1) $f(x_0,y_0)$ definiert ist
2) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existiert
3) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

Partielle Differentiation

$\frac{\partial}{\partial x} \to$ y als Konstante annehmen und nach x ableiten

$\frac{\partial}{\partial y} \to$ x als Konstante annehmen und nach y ableiten

Bsp.: $f(x,y)=x^2y+y+\sin(x)$

$f_x(x,y)=2xy+\cos(x)$

$f_y(x,y)=x^2+1$

Geometrische Interpretation der partiellen Ableitung nach y an der Stelle (a,b)

Die partielle Ableitung $f_y(a,b)$ gibt die Steigung an der Stelle (a,b) der Tangente an die Kurve, welche wir als Schnittkurve des Graphen von f mit der Ebene $x=a$ erhalten

Satz von Schwarz

Falls die Fkt. stetig und differenzierbar ist, ist die Reihenfolge, in der die partiellen Differentiationen nach den einzelnen Variablen durchgeführt werden, nicht entscheidend für das Ergebnis

$\boxed{f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)}$ → wenn gilt: totales Differential $df=f_x\,dx+f_y\,dy$

Höhere partielle Ableitungen

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=f_{yx}(x,y)$ → erst nach y, dann nach x ableiten

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=f_{xy}(y,x)$ → erst nach x, dann nach y ableiten

rechts nach links
links nach rechts

2D-Kettenregel

$z=f(x,y)=f(g(t),h(t)) \longrightarrow \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

Produktregel

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}=\left.\frac{d(u\cdot v)}{dx}\right|_{x=a}=\frac{du}{dx}\cdot v(a)+u(a)\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=a}$

Mittlere Änderung

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Bsp.: $C=k\ln(1+\frac{S}{N})$ $\quad S(t)=4+\cos(2\pi t)$ $\quad N(t)=2+\sin(2\pi t)$

$\frac{dC}{dt}=\frac{\partial C}{\partial S}\frac{dS}{dt}+\frac{\partial C}{\partial N}\frac{dN}{dt}$

$\to \frac{\partial C}{\partial S}=k\left(\frac{1}{(1+S\cdot\frac{1}{N})}\cdot\frac{1}{N}\right)=\frac{k}{N+S}$; $\frac{dS}{dt}=-2\pi\sin(2\pi t)$

$\frac{\partial C}{\partial N}=k\left(\frac{1}{1+S/N}\cdot\left(-\frac{S}{N^2}\right)\right)=-\frac{kS}{N^2+SN}$; $\frac{dN}{dt}=2\pi\cos(2\pi t)$

$\Rightarrow \frac{dC}{dt}=\frac{k}{N+S}\cdot\left(-2\pi\sin(2\pi t)\right)-\frac{kS}{N^2+SN}2\pi\cos(2\pi t)$

Gradient ∇f

„Zusammenfassung aller 1. partiellen Ableitungen" $\nabla f=\binom{f_x}{f_y}$ Wert der höchsten Steigung $\|\nabla f\|=\sqrt{f_x^2+f_y^2}$

steht senkrecht auf der Niveaulinie

- zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs

die Länge des Gradienten $\|\nabla f(a,b)\|$, gibt die max. Änderungsrate in diesem Punkt an

Richtungsableitung

- Änderungsrate an einem Punkt der Fkt. f entlang eines Richtungsvektors $\vec{u}$
  - der Richtungsvektor muss dabei normiert sein, also $|\vec{u}|=1$

$$\vec{u}=\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix} \longrightarrow \vec{e}_u=u_x\vec{e}_x+u_y\vec{e}_y=\frac{1}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}$$

$$D_{\vec{u}}f(a,b)=\nabla f(a,b)\cdot\vec{e}_u=\|\nabla f(a,b)\|\cdot\underbrace{\|\vec{u}\|}_{1}\cdot\cos(\alpha)$$

Bsp.: $D_{\vec{u}}f(1,2)$; $f(x,y)=xy+y^3$ $\quad \vec{u}=\frac{3\vec{e}_x-4\vec{e}_y}{5}=\frac{3}{5}\vec{e}_x-\frac{4}{5}\vec{e}_y=\begin{pmatrix}3/5\\-4/5\end{pmatrix}$ ← normiert

$\frac{\partial f}{\partial x}=y$; $\frac{\partial f}{\partial y}=x+3y^2 \rightarrow \nabla f=\begin{pmatrix}y\\x+3y^2\end{pmatrix}$ mit $x=1$ und $y=2$ $\nabla f=\begin{pmatrix}2\\13\end{pmatrix}$

$D_{\vec{u}}f(1,2)=\begin{pmatrix}2\\13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3/5\\-4/5\end{pmatrix}=\frac{6}{5}-\frac{52}{5}=-\frac{46}{5}=-9{,}2$ ⟶ Änderungsrate bei $f(1,2)$ in Richtung $\vec{u}=\begin{pmatrix}3/5\\-4/5\end{pmatrix}$

Tangentialebene - lokale Linearisierung

Die Tangentialebene an die durch $f(x,y)$ bestimmte Fläche mit Berührungspunkt (a,b) ist gegeben durch

$$z=\underbrace{f(a,b)}_{\text{Referenz-Fkt.wert}}+\underbrace{f_x(a,b)}_{\text{Steigung in x-Richtung}}(x-a)+\underbrace{f_y(a,b)}_{\text{Steigung in y-Richtung}}(y-b)$$

→ ≙ 1. Taylorapproximation

beschreibt das lokale Verhalten um den Berührungspunkt mit dem Graphen

Bsp.: $f(x,y)=x/y$ bei $P(3|-2)$

$f_x(x,y)=\frac{1}{y}$; $f_y(x,y)=-\frac{x}{y^2}$; $f(3,-2)=-1{,}5$; $f_x(3,-2)=-0{,}5$; $f_y(3,-2)=-0{,}75$

$z=-1{,}5-0{,}5(x-3)-0{,}75(y+2)=\cancel{-1{,}5}-0{,}5x\cancel{+1{,}5}-0{,}75y-1{,}5$

$z=-0{,}5x-0{,}75y-1{,}5$

Satz von Taylor für Fkt. 2 Variablen

$$T(x,y)=\underbrace{f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)}_{\text{Tangentialebene}}+\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right)+\frac{1}{3!}\ldots$$

Kurvendiskussion

1) Definitionsbereich bestimmen ⟶ gibt es (nicht) hebbare Definitionslücken?
2) Stetigkeit & Grenzwerte
3) Symmetrieverhalten
4) Kritische Punkte → f', f'' & f''' (Extrema (lokal & global), WP, SP)
5) Krümmungsverhalten → konvex: $f''>0$, konkav: $f''<0$

	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$
Maximum	0	<0	/
Minimum	0	>0	/
R-L-WP	≠0	0	>0
L-R-WP	≠0	0	<0
Sattelpunkt	0	0	≠0

Optimierung (Vorgehen)

1) Formel für die zu optimierende Größe aufstellen
2) Formel für die Nebenbedingung aufstellen
3) Reduktion auf eine Variable
4) Definitionsbereich bestimmen
5) Bestimmung des optimalen Werts (globales Extremum)

Alina Popov

Approximation

Lineare Approximation → Tangentenapproximation

$\boxed{t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$ → 1. Taylorpolynom von f an der Stelle x_0

m x + b

Differential: $df=f'(x_0)dx$

Satz von Taylor am Entwicklungspunkt x_0: $f(x)=\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{1}{k!}(x-x_0)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1} = P_n(x)+R_n(x)$

↳ Je mehr Ableitungen, desto besser die Annäherung

Taylorpolynom n-ten Gerades, Restterm

Taylorreihe um den Entwicklungspunkt a: $f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\frac{1}{6}f'''(a)(x-a)^3+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a)\frac{1}{k!}(x-a)^k$

"∞-gute" Approximation

1) Taylorreihe konv. $\forall x\in\mathbb{R}$

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots$$

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Konvergenzradius R="∞"

2) Taylorreihe konv. nur für $x\in(-1;1)$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=x+x^2+x^3+\ldots \quad \leftarrow \text{geometrische Reihe}$$

$$(1+x)^p=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{p}{n}x^n=1+px+\frac{p(p-1)}{2}x^2+\ldots \quad \leftarrow \text{Binomialreihe}$$

Bsp.: $a=\pi/2$; $n=4$

$x=\pi/2$

$f(x)=\cos(x)\rightarrow 0$

$f'(x)=-\sin(x)\rightarrow -1$

$f''(x)=-\cos(x)\rightarrow 0$

$f'''(x)=\sin(x)\rightarrow 1$

$f''''(x)=\cos(x)\rightarrow 0$

$$T(x)=\overset{0}{\cos(x)}-\overset{-1}{\sin(x)}(x-\tfrac{\pi}{2})-\frac{\overset{0}{\cos(x)}}{2}(x-\tfrac{\pi}{2})^2+\frac{\overset{1}{\sin(x)}}{3!}(x-\tfrac{\pi}{2})^3+\frac{\overset{0}{\cos(x)}}{4!}(x-\tfrac{\pi}{2})^4=0-(x-\tfrac{\pi}{2})+\tfrac{1}{6}(x-\tfrac{\pi}{2})^3=-x+\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{1}{6}(x-\tfrac{\pi}{2})^3$$

Rechnen mit Taylorreihen (als Potenzreihen dargestellt) ($f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$; $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$)

Multiplikation: $f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)x^n$

Termweises Ableiten: $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n\cdot x^{n-1}$ (wenn x im Konvergenzintervall I ist)

Termweises Integrieren: $\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_nx^n\,dx$ (wenn x im Konvergenzintervall I ist)

Extremstellen

Lokale Extremstellen

Notwendiges Kriterium: $\nabla f(x,y)=\vec{0}$

Hinreichendes Kriterium: Hesse-Matrix: $\vec{H}=\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}$

↳ Diskriminante: $D(a,b)=f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2$

Minimum: $D(a,b)>0$ und $f_{xx}(a,b)>0$

Maximum: $D(a,b)>0$ und $f_{xx}(a,b)<0$

Sattelpunkt: $D(a,b)<0$

$D(a,b)=0$ keine Aussage

Bsp.: $f(x,y)=2x^3-3x^2y+6x^2-6y^2$

$f_x(x,y)=6x^2-6xy+12x$

$f_y(x,y)=-3x^2-12y$

$f_{xx}(x,y)=12x-6y+12$

$f_{yy}(x,y)=-12$

$f_{xy}(x,y)=-6x$

$$\nabla f=\begin{pmatrix}6x^2-6xy+12x\\ -3x^2-12y\end{pmatrix} \qquad H=\begin{pmatrix}12x-6y+12 & -6x\\ -6x & -12\end{pmatrix}$$

$D(x,y)=(12x-6y+12)(-12)-(-6x)^2=-144x+72y-144-36x^2$

$\nabla f=0$ für $x=y=0$

$D(0,0)=-144<0\rightarrow$ Sattelpunkt bei $(0,0)$

Differentialgleichungen

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)^{b_n} = s(x)$$

Potenz

Ableitung

Störfunktion

Faktor, kann von x abhängen

Klassifizierung

Linearität

- DGL ist linear, wenn die Koeffizienten konstant sind

Homogenität

- DGL ist homogen, wenn $s(x)=0$ ist
- DGL ist inhomogen, wenn $s(x)\neq 0$ → $s(x)$ kann Konstante/Faktor sein

Ordnung

- Ordnung einer DGL entspricht der höchsten Ableitung

Bsp.: $y^{(4)}(x)-4y'''(x)+5y''(x)-4y'(x)+4y(x)=0$

→ 4. Ordnung, linear & homogen

Lineare, homogene DGL

1) Fundamentallösungen

- DGL der Ordnung N besitzt N Lösungsfunktionen $f_1(x),\dots,f_N(x)$

2) Superpositionsprinzip

⇒ Jede Linearkombination der Fundamentallösung ist selber wieder eine Lsg. der DGL

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)=0$$

↓

N Fundamentallösungen

$f_1(x),\dots,f_N(x) \rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{N} b_n f_n(x)$

↳ Linearkombination

Bsp.: DGL der Ordnung 3 → f_1, f_2, f_3

↳ Linearkombination $F=af_1+bf_2+cf_3$

Lösen von linearen, homogenen DGL (höhere Ordnung)

- **Euler'sche Ansatz**
  - konstante Koeffizienten! → $a_n(x)=a_n$

Ansatz: $f(x)=e^{\lambda x}$

$$a_n f^{(n)}(x)+a_{n-1}f^{(n-1)}(x)+\dots+a_0 f(x)=0$$

↓ Euler'sche Ansatz

$$a_n\lambda^n e^{\lambda x}+a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+\dots+a_0 e^{\lambda x}=0$$

↓ $:e^{\lambda x}$

$$\boxed{a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_0=0}$$

↳ charakteristisches Polynom

Bsp.: $x''(t)-x(t)=0 \quad | \; x(t)=e^{\lambda t} \quad x'(t)=\lambda e^{\lambda t} \quad x''(t)=\lambda^2 e^{\lambda t}$

$\lambda^2 e^{\lambda t}=e^{\lambda t} \quad | :e^{\lambda t}$

$\lambda^2=1 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=-1$

$\rightarrow x_1(t)=e^{t} \quad x_2(t)=e^{-t}$

$\Rightarrow \boxed{x(t)=Ae^{t}+Be^{-t}}$

Bei komplex-konjugierten NS: $y(x)=e^{\mathrm{Re}\, x}(A\cos(\mathrm{Im}\cdot x)+B(\mathrm{Im}\cdot x))$

Bsp.: $x''(t)-6x'(t)+25x(t)=0 \quad | \; x(t)=e^{\lambda t}$

$\lambda^2e^{\lambda t}-6\lambda e^{\lambda t}+25e^{\lambda t}=0 \quad | :e^{\lambda t}$

$\lambda^2-6\lambda+25=0 \quad$ | Mitternachtsformel

$\lambda_{1,2}=3\pm\sqrt{9-25}$

$\lambda_1=3+4i \quad \lambda_2=3-4i$

$\rightarrow \tilde{x}_1(t)=e^{(3+4i)t} \quad \tilde{x}_2(t)=e^{(3-4i)t}$

$\Rightarrow x_1(t)=Ae^{3t}(\cos(4t)+i\sin(4t))$

$x_2(t)=Be^{3t}(\cos(4t)-i\sin(4t))$

$\boxed{x(t)=e^{3t}(C\cos(4t)+D\sin(4t))}$

Bei mehrfachen NS: $y(x)=Ae^{\lambda x}+Bxe^{\lambda x}+Cx^2e^{\lambda x}+\dots$

Bsp.: $x^{(4)}(t)-2x^{(2)}(t)+x(t)=0$

$\lambda^4e^{\lambda t}-2\lambda^2e^{\lambda t}+e^{\lambda t}=0$

$\lambda^4-2\lambda^2+1=0 \quad$ | subst. und p-q

$\lambda_{1,2}=1 \quad \lambda_{3,4}=-1$

$x(t)=Ae^{t}+Bte^{t}+Ce^{-t}+Dte^{-t}=\boxed{e^{t}(A+tB)+e^{-t}(C+tD)}$

Anfangswertprobleme - Bsp.

$x''(t) - x(t) = 0 \quad x(0)=1 \quad x'(0)=0$

$x(t) = Ae^t + Be^{-t}$

$\left.\begin{array}{l} x(0) = Ae^0 + Be^0 = A+B = 1 \rightarrow A = 1-B \\ x'(t) = Ae^t - Be^{-t} = 0 \\ x'(0) = Ae^0 - Be^0 = 0 \rightarrow A = B \end{array}\right\} A=B=0{,}5$

$x(t) = 0{,}5e^t + 0{,}5Be^{-t}$

Partialbruchzerlegung

$\int \frac{1}{u^2-u}\,du = \int \frac{1}{u(u-1)}\,du$

$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} \quad | \cdot HN$

$A(u-1) + B\cdot u = 1$

$\left.\begin{array}{l} u=0 \Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A=-1 \\ u=1 \Rightarrow B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{u(u-1)} = \frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1}$

DGL 1. Ordnung

Trennung der Variablen

$\frac{dy}{dx} = f(y)\cdot g(x) \quad | \cdot dx \quad | : f(y)$

$\frac{1}{f(y)}dy = g(x)dx \quad | \int$

$\int \frac{1}{f(y)}dy = \int g(x)dx$

Bsp.: $\frac{dz}{dy} = zy \qquad z(0)=1$

$\frac{1}{z}dz = y\,dy \quad | \int$

$\ln(z) = \frac{1}{2}y^2 + c \quad | e^c$

$z(y) = e^{\frac{1}{2}y^2}\cdot e^c$

$z(0) = e^{\frac{1}{2}\cdot 0^2}\cdot c = 1 \rightarrow c=1$

$z(y) = e^{\frac{1}{2}y^2}$

Substitution

1.Fall: Wenn $\boxed{y'(x) = f(ax+by+c)}$, dann $u = ax+by+c$

Vorgehen:

1) Definiere Hilfsfkt.: $u(x) := ax+by+c$

2) Ableitung berechnen: $\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$

3) Einsetzen von $\frac{dy}{dx}$: $\frac{du}{dx} = a + bf(u) \leftarrow$ autonom, da x nicht vorkommt

4) Lösen der DGL für u

↳ Aus der Lsg. für u können wir Lsg. für y finden

Bsp.: $y' = \frac{dy}{dx} = \underbrace{2y}_{by}\underbrace{-x}_{ax}\underbrace{+3}_{c}\,; \quad y(5/2) = -3e^5$

$u = 2y-x+3 \qquad y = \frac{u+x-3}{2}$

$u' = 2y'-1 \qquad y' = \frac{u'+1}{2}$

$u = y' \rightarrow u = \frac{u'+1}{2} \rightarrow u' = 2u-1$

$\frac{du}{dx} = 2u-1$

$dx = \frac{1}{2u-1}du \quad | \int$

$x + c = \frac{1}{2}\ln(2u-1) \quad | \cdot 2 \quad | e^{()}$

$e^{2x+c} = 2u-1 \qquad | u = 2y-x+3$ (resub.)

$e^{2x+c} = 2(2y-x+3)-1$

$e^{2x+c} = 4y-2x+5$

$y = \frac{e^{2x+c}+2x-5}{4} = ce^{2x} + \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$

$y(5/2) = ce^5 + \frac{5}{4} - \frac{5}{4} = -3e^5$

$ce^5 = -3e^5 \rightarrow c = -3 \rightarrow y(x) = -3e^{2x} + \frac{x}{2} - \frac{5}{4}$

2.Fall: Wenn $\boxed{y'(x) = g(\frac{y}{x})}$, dann $u = \frac{y}{x} \rightarrow y' = x\cdot u' + u$

$\rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}(g(u)-u)$

Vorgehen:

1) $u := \frac{y}{x}$

2) $\frac{du}{dx} = \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} = \frac{\overbrace{\frac{dy}{dx}}^{g(u)} - \overbrace{\frac{y}{x}}^{u}}{x} \overset{3)}{=} \frac{g(u)-u}{u}$

4) $\frac{du}{dx} = \frac{g(u)-u}{x}$

↳ $\int \frac{du}{g(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$ --> Lsg.

Bsp.:

$y' = \frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} - 5 \;; \quad y(1) = 10$

$u = \frac{y}{x} \rightarrow y = u\cdot x \rightarrow y' = x\cdot u' + \frac{y}{x} \rightarrow y' = x\cdot u' + u$

$u' = -\frac{y}{x^2} + \frac{y'}{x}$

$x\cdot u' + u = 2u - 5$

$xu' = (u-5)$

$x\frac{du}{dx} = u-5 \qquad |$ Trennung der Variablen

$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{u-5}du \quad | \int$

$\ln(x) + c = \ln(u-5) \quad | e^{()}$

$x\cdot c = u-5 \qquad | u = \frac{y}{x}$ (resub.)

$x\cdot c = \frac{y}{x} - 5$

$y(x) = (x\cdot c + 5)x$

$y(1) = c + 5 = 10 \rightarrow c = 5$

$\rightarrow y(x) = 5x(x+1)$

Inhomogene DGL höherer Ordnung

Variation der Konstanten

- Anwendung: zum Finden der partikulären Lösungen einer inhomogenen DGL (mit Störterm)

$\sum_n^N a_n\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)=s(x)$

↳ homogene Lsg. $f_h(x)$ löst $\sum_n^N a_n\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)=0$

↳ partikuläre Lsg. $f_p(x)$ löst $\sum_n^N a_n\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)=s(x)$

1) Bestimme Lsg. der homogenen DGL

$y_h = Ae^x$

2) Annahme, dass auch die Konstante A auch von x abhängt

$y_p = A(x)e^x$

3) Ableitungen berechnen

$y_p'(x) = A'(x)e^x + A(x)e^x$

4) Einsetzen in die Ausgangs-DGL und auflösen

$\boxed{y(x)=y_h+y_p}$

Einige nützliche Ansätze	
Rechte Seite der Diff.-gl. / Störfunktion	Ansatz für die partikuläre Lösung
Polynom $s(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$	$y(t)=C_0+C_1t+\cdots+C_nt^n$
Spezialfall: 0 ist eine **m**-fache Nullst. des charakteristischen Polynoms	$y(t)=(C_0+C_1t+\cdots+C_nt^n)t^{\mathbf{m}}$
Exponentialfunktion $s(t)=Ae^{kt}$	$y(t)=Ce^{kt}$
Spezialfall: k ist eine **m**-fache Nullst. des charakteristischen Polynoms	$y(t)=(Ce^{kt})t^{\mathbf{m}}$
Schwingung $s(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$	$y(t)=C_1\sin(\omega t)+C_2\cos(\omega t)$
Spezialfall: $i\omega$ ist eine **m**-fache Nullst. des charakteristischen Polynoms	$y(t)=(C_1\sin(\omega t)+C_2\cos(\omega t))t^{\mathbf{m}}$

Bsp.:

$x'+\delta x=\cos(\omega t)$

$x_h(t)$: $\lambda+\delta=0$

$\lambda=-\delta$

$x_h(t)=Ae^{-\delta t}$

$x_p(t)=A(t)e^{-\delta t}$

$x_p'(t)=A'(t)e^{-\delta t}-\delta A(t)e^{-\delta t}$

$A'(t)e^{-\delta t}\cancel{-\delta A(t)e^{-\delta t}}+\cancel{\delta A(t)e^{-\delta t}}=\cos(\omega t)$

$A'(t)e^{-\delta t}=\cos(\omega t)$

$A'(t)=\frac{\cos(\omega t)}{e^{-\delta t}}=\cos(\omega t)e^{\delta t} \quad |\int$

$A(t)=\frac{1}{\delta^2+\omega^2}e^{\delta t}(\delta\cos\omega t+\omega\sin\omega t)+C$

$x(t)=Ae^{-\delta t}+\frac{1}{\delta^2+\omega^2}e^{\delta t}(\delta\cos\omega t+\omega\sin\omega t)+C$

Wann welche Lösungstechnik?

Ordnung?

- 1. Ordnung
  - Form $y'(x)=f(y)g(x)$?
    → Trennung der Variablen
  - Form $y'(x)=f(ax+by+c)$?
    →Substitution $u=ax+by+c$
  - Homogen in den Variablen?
    →Substitution $u=\frac{y}{x}$
  - Inhomogen?
    →Variation der Konstante
- Höhere Ordnung
  - Inhomogen?
    - homogen
      → Eulerscher Ansatz:
      charakteristische Gleichung
      Fundamentallösungen
      Anzahl Fundamentallösungen entspricht Ordnung
    - inhomogen
      → 1. Allgemeine Lösung y_h der dazugeh. homogenen Diff.-gl.
      Eulerscher Ansatz!
      → 2. partikuläre Lösung y_p durch geschickten Ansatz
      siehe Tabelle!
      → 3. Allgemeine Lösung $y=y_h+y_p$

Systeme von DGL

Entkoppelte DGL: wenn in einer Gleichung nur eine unbekannte Größe vorkommt

1. Die entkoppelte Gl. lösen und das Resultat in die anderen Gleichungen einsetzen
2. Rand- und Anfangswerte am Ende berücksichtigen

Gekoppelte DGL

1. Eine der beiden Gleichungen wird nochmals abgeleitet
2. Resultat so umschreiben, dass eine DGL zweiter Ordnung übrig bleibt
3. Einsetzen, umformen & Rand- und Anfangswerte am Ende berücksichtigen

Bsp.: $\dot{x} = -2y$, $\dot{y} = \frac{1}{2}x$ $\qquad \ddot{x} = -2\dot{y} \rightarrow \ddot{x} = -x$ $\qquad \left.\begin{matrix} x(0) = 4 \\ y(0) = 0 \end{matrix}\right\}$ Anfangswerte

$\ddot{x} + x = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1} \quad \lambda_1 = i, \ \lambda_2 = -i$

$x(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$

$x(0) = A\sin(0) + B\cos(0) = 4 \rightarrow B = 4$

$x(t) = A\sin(t) + 4\cos(t)$

$\dot{x}(t) = A\cos(t) - 4\sin(t)$

$y = -\frac{\dot{x}}{2} \rightarrow y(t) = \frac{A}{2}\cos(t) - 2\sin(t)$

$y(0) = \frac{A}{2}\cos(0) - 2\sin(0) = 0$

$A = 0$

$x(t) = 4\cos(t)$

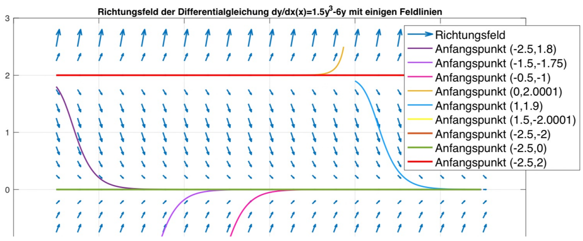
$y(t) = 2\sin(t)$

Vektorfelder

Richtungsfeld: in jedem Punkt der xy-Ebene wird der entsprechende Wert der momentanen Veränderung durch einen entsprechenden Vektor eingetragen

Gleichgewichtslösungen: $y(x) = C$ resp. $y'(x) = 0$

→ stabil, falls für jede Lsg. $z(x)$ von der DGL mit einer Anfangsbedingung, gilt $\lim_{x \to \infty} z(x) = C$



instabile GGW-Lsg. - Vektoren zeigen weg von der Lsg.

stabile GGW-Lsg - Vektoren zeigen zur Lsg. hin

Vektorfeld zur geg. DGL zuordnen:

1. DGL lösen
2. GGW-Lsg. bestimmen. Konstante c gegen 0 und ∞ laufen lassen
3. GGW-Lösungen in den geg. Vektorfeldern aufzeichnen und mit DGL-Lsg. vergleichen

Hinweis: $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Bsp.: Gegeben ist das Richtungsfeld $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy+2 \\ x^2+1 \end{pmatrix}$, berechnen Sie die Arbeit $\int_K F\,dp$, welche entlang des Weges von $(2,0)$ zu $(0,0)$ verrichtet wird

wir wissen: $\vec{F}_x = 2xy + 2 \rightarrow \int 2xy + 2\,dx = yx^2 + 2x + g(y) = F(x,y)$

$\Rightarrow F_y(x,y) = \cancel{x^2} + g'(y) = \vec{F}_y = \cancel{x^2} + 1$

$\Rightarrow g'(y) = 1 \quad | \int \quad \rightarrow g(y) = y$

$\Rightarrow F(x,y) = yx^2 + 2x + y$

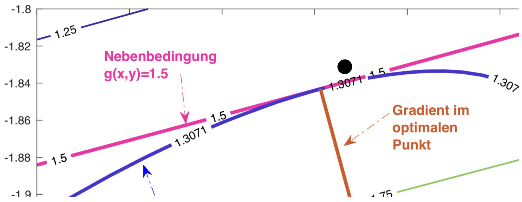
$F(0,0) - F(2,0) = 0 - 4 = -4$

Alina Popov

Lagrage-Multiplikation (Optimierung bei geg. NB)

- Ist die zu optimierende Fkt. stetig und der betrachtete Bereich beschränkt und abgeschlossen, wird sowohl das Minimum als auch das Maximum angenommen
- Die Nebenbedingung kann als Niveaulinie einer geeigneten Funktion $g(x,y)$ gesehen werden
- Im optimalen Punkt berühren sich die Kurve der NB und die entsprechende Niveaulinie der zu optimierenden Funktion tangential

$\rightarrow$ die beiden Gradienten ∇f und ∇g sind parallel



Vorgehen zum Lösen

1. LGS aufstellen $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y)=c \end{cases} \Rightarrow$ I. $f_x = \lambda g_x$, II. $f_y = \lambda g_y$, III. $g(x,y)=c$
2. Nach λ umformen
3. λ einsetzen, um x oder y zu bestimmen, oder in die Fkt wenn simpl
4. x oder y in die NB einsetzen, um y oder x zu bestimmen
5. Die berechneten Punkte in $f(x,y)$ einsetzen $\longrightarrow$ Min. und Max bestimmen

Wenn NB als $\geq$ bzw. $\leq$ gegeben ist: den inneren/äußeren Bereich überprüfen

1. $\nabla f \overset{!}{=} 0$
2. gefundene Werte für x und y in NB einsetzen und Gültigkeit überprüfen

Bsp.: $f(x,y)=(x+3)^2+(y-3)^2$; $g(x,y)=x^2+y^2 \leq 2$

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x+6 \\ 2y-6 \end{pmatrix} \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2x+6 \\ 2y-6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$x^2+y^2-2=0$

$\left.\begin{array}{l} \text{I: } 2x+6-2\lambda x=0 \\ \text{II: } 2y-6-2\lambda y=0 \\ \text{III: } x^2+y^2-2=0 \end{array}\right\}$ gilt für $(-1,1)$ und $(1,-1)$

$f(-1,1)=8 \rightarrow$ Minimum

$f(1,-1)=32 \rightarrow$ Maximum

inneren/äußeren Bereich überprüfen

$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x+6 \\ 2y-6 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \rightarrow x=-3;\ y=3$

$g(-3,3)=x^2+y^2=(-3)^2+3^2=18>2$ ↯

nicht erfüllt

Integration

Wichtige Integrale:

$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$ | $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+c$ | $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x)-x$ | $\int x\ln(x)\,dx = x^2\left(\frac{\ln(x)}{2}-\frac{1}{4}\right)$

$\int e^x\,dx = e^x+c$ | $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$

$\int \sin x\,dx = -\cos x+c$ | $\int \cos x\,dx = \sin x+c$ | $\int \tan(x)\,dx = -\ln|\cos(x)|$ | $\int \cot(x)\,dx = \ln|\sin(x)|$

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x+c$ | $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\cot x+c$ | $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$ | $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$, wenn $|x|<|a|$

Partielle Integration

$$\int f g'\,dx = f\cdot g - \int f' g\,dx$$

Bsp.: $\int \sin(x)e^x\,dx = e^x\sin(x) - \int \cos(x)e^x\,dx = e^x\sin(x) - \left(e^x\cos(x) - \int e^x(-\sin(x))\,dx\right) = e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\,dx \quad \Big| + \int e^x\sin(x)\,dx$

$g'=e^x \rightarrow g=e^x$
$f=\sin(x) \rightarrow f'=\cos(x)$

$g'=e^x \rightarrow g=e^x$
$f=\cos(x) \rightarrow f'=-\sin(x)$

$\int \sin(x)e^x\,dx = e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\,dx \quad \Big| + \int e^x\sin(x)\,dx$

$\rightarrow 2\int e^x\sin(x)\,dx = e^x(\sin(x)-\cos(x)) \quad \Big| :2$

$$\int e^x\sin(x)\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin(x)-\cos(x))$$

Faustregel:

ableiten $\qquad$ integrieren

$$L > I > A > T > E$$

Log, inverse Winkel, Polynome, Trig, Exp

Integration durch Substitution

$$\boxed{\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(y)\,dy}$$

Subst.: $y := g(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = g'(x) \rightarrow dx = \frac{dy}{g'(x)}$

Bsp.: $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+u^2}\,a\,du = \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{\arctan(u)}\cdot a$

$u := \frac{x}{a} \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{a} \rightarrow dx = a\,du$

resub. $\rightarrow = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$

Bestimmte Integration

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

Subst.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \ , \quad a \geq b \geq c$$

Bsp.: $\int_0^2 2xe^{x^2}\,dx = \int_0^4 e^y\,dy = [e^y]_0^4$

Subst. $y := x^2$

$\frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$

ungerade: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad | \ f(x) = -f(-x)$

gerade: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^a f(x)\,dx \quad | \ f(x) = f(-x)$

Uneigentliche Integrale:

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^\lambda f(x)\,dx}$$

Volumen von Rotationskörpern

$V = \pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx$

Mantelfläche von Rotationskörpern

$M = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Doppelintegrale

Integration über Gebiet $G \mapsto \mathbb{R}^2$

$\boxed{\iint_G f\,dA = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\,dy}$ → lösen von Innen nach Außen (Reihenfolge relevant)

Bsp.: $z(x,y) = 2\sin(x)\cos(y)$; $0 \leq x \leq \pi/2$; $0 \leq y \leq \pi/4$

$$V = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} 2\sin(x)\cos(y)\,dy\,dx = \int_0^{\pi/2} 2\sin(x)\sin(y)\Big|_0^{\pi/4}\,dx = \int_0^{\pi/2} 2\sin(x)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)dx = -2\cos(x)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

Begrenzung des Gebiets durch Fkt.:

1. Fall: y-Werte beschränkt durch Fkt. in x:

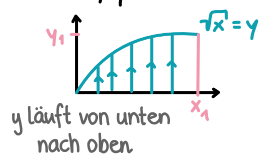
- Definition der y-Grenzen mit x
- Man muss zuerst nach y integrieren → $dy\,dx$

2. Fall: x-Werte beschränkt durch Fkt. in y

- Definition der x-Grenzen mit y
- Man muss zuerst nach x integrieren → $dx\,dy$

Bsp.: $y = \sqrt{x}$ beschränkt von oben, $y = 0$ von unten

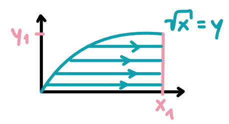
$\int_0^{x_1}\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$



y läuft von unten nach oben

Bsp.: $y = \sqrt{x} \leftrightarrow x = y^2$ beschränkt von oben, $x = x_1$ von unten

$\int_0^{y_1}\int_{y^2}^{x_1} f(x,y)\,dx\,dy$



Umkehrung der Reihenfolge

Bsp.: $\int_{y=0}^{3}\int_{x=y^2}^{9} y\sin(x^2)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{9}\int_{y=0}^{\sqrt{x}} y\sin(x^2)\,dy\,dx$

Für Mittelwert $\bar{f}_G$ von f über G haben wir $\boxed{\bar{f}_G = \frac{1}{A_G}\int_G f\,dA}$

Länge einer Kurve $\quad l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

Integration in Polarkoordinaten einer Funktion in zwei Variablen

Bei der Integration in Polarkoordinaten gilt:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \quad und \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$dA = r\,dr\,d\varphi \quad respektive \quad dA = r\,d\varphi\,dr$$

Die Grenzen des äusseren Integrals können nur Konstanten sein.

Die Grenzen des inneren Integrals dürfen von der Integrationsvariablen des äusseren Integrals abhängen.

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dA = \int_0^r \int_0^\varphi f(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi}$$

Bsp.: ① $\iint_A \sin(x^2+y^2)\,dA = \int_0^2\int_0^{2\pi} \sin(r^2)\,r\,dr\,d\varphi = \int_0^2 \sin(r^2)\cdot r\varphi \Big|_0^{2\pi} dr = \int_0^2 2\pi r\cdot \sin(r^2)\,dr = \pi \cancel{r^2}\cdot(-\cos(r^2)\cdot \cancel{\tfrac{1}{2}})\Big|_0^2 = -\pi\cos(r^2)\Big|_0^2 = -\pi\cos(4)+\pi$

$= \pi(1-\cos(4)) = 5{,}2$

② $x\cdot y = r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi = r^2\cos\varphi\sin\varphi$

$\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}} xy\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^{\pi/4} r^2\cos\varphi\sin\varphi\, r\,d\varphi\,dr = \int_0^2 r^3\cdot -\frac{1}{2}\cos^2\varphi\Big|_0^{\pi/4} dr = \int_0^2 -\frac{r^3}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)dr = \int_0^2 \frac{1}{4}r^3\,dr = \frac{1}{16}r^4\Big|_0^2 = 1$

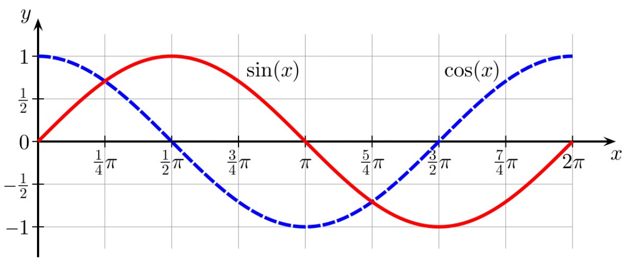
Important Stuff

Trigonometrie

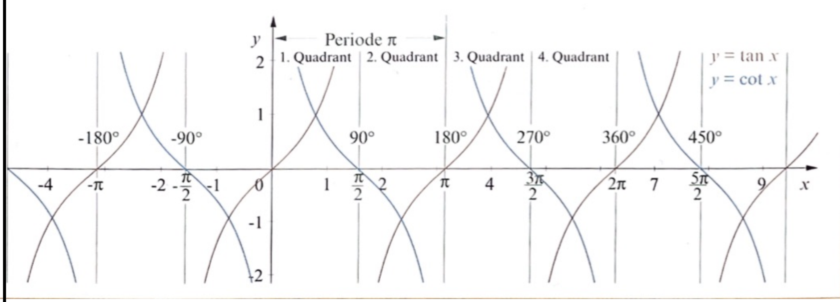
Spezielle Funktionswerte der Winkelfunktionen

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	225°	270°	360°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	1	–	0

sin & cos



tan & cot



Darstellung einer Winkelfunktion durch eine andere Funktion desselben Winkels

Komplementwinkelbeziehung: $\sin x = \cos(90° - x)$; $\cos x = \sin(90° - x)$; $\tan x = \cot(90° - x)$; $\cot x = \tan(90° - x)$

„trigonometrischer Pythagoras": $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$	$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$	$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$	$\cot^2 x = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$
$\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$	$\tan^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$	$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$